Μάθημα 25ο

Διαφορική Γεωμ.

Άσκηση 1

Δίνεται η επιφάνεια $S: z = x^2+y^2$. Να βρεθούν οι κύριες διευθύνσεις στο σημείο $P_0=(1,0,1)$

Λύση

Η S είναι κανονική επιφάνεια ως επιφάνεια γραφήματος της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y)=x^2+y^2$ με σύστημα συντεταγ.

$$X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad X(u,v) = (u,v,u^2+v^2) = (u,v,h(u,v))$$

Το διάνυσμα $w = aX_u + bX_v = aX_u(1,0)+bX_v(1,0) \neq 0$ είναι κύρια διεύθυνση $\iff$

$$(*)\quad \begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E(1,0) & F(1,0) & G(1,0) \\ e(1,0) & f(1,0) & g(1,0) \end{vmatrix} = 0$$

$$X_u = (1,0,2u) \qquad X_{uu} = (0,0,2) \qquad X_{vv} = (0,0,2)$$

$$X_v = (0,1,2v) \qquad X_{uv} = (0,0,0)$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

$$X_u \times X_u = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u,-2v,1)$$

$$e = \langle X_{uu}, N\rangle = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}, \quad f = \langle X_{uv}, N\rangle = 0, \quad g = \langle X_{vv}, N\rangle = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

$$E = \|X_u\|^2 = 1+4u^2 \qquad E(1,0) = 5 \qquad e(1,0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$F = \langle X_u, X_v\rangle = 4uv \qquad F(1,0) = 0 \qquad f(1,0) = 0$$

$$G = \|X_v\|^2 = 1+4v^2 \qquad G(1,0) = 1 \qquad g(1,0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(*) \iff \begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{vmatrix} = 0 \iff ab \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$a=0$ ή $b=0$

Οι κυριες διευθυνσεις ειναι X_u, X_v

$$\{e_1(1,0), e_2(1,0)\} = \left\{ \frac{X_u(1,0)}{\sqrt{E(1,0)}}, \frac{X_v(1,0)}{\sqrt{G(1,0)}} \right\}$$

Ασκηση 2

Δινεται η παραμετρικη επιφανεια $X(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v)$
Δειξτε οτι ειναι κανονικη
Ειναι ευθειογενής; Ειναι αναπτυκτή; Ειναι τοπικα ισομετρικη με το ορθο κυκλικο κυλινδρο;

Λυση

Για να δειξω οτι ειναι κανονικη θα πρεπει να δειξω οτι $X_u \times X_v \neq 0$
Μετα απο πραξεις $X_u \times X_v = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, -v)$
$\|X_u \times X_v\|^2 = 1 + 2v^2 > 0$ συνεπως η επιφανεια μου ειναι κανονική

Θελω να δειξω οτι ειναι ευθειογενης.
$X(u,v) = (\cos u, \sin u, 0) + (-v\sin u, v\sin u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(-\sin u, \cos u, 1) =$
$= C(u) + v\,w(u)$ με $C(u) = (\cos u, \sin u, 0)$, $w(u) = (-\sin u, \cos u, 1) \neq 0$
Ειναι ευθεια γιατι εχω σημειο και διανυσμα μη μηδενικο
Ειναι ευθειογενής.
Ειναι επιπεδη καμπυλη πανω στο $z=0$ κυκλος με κεντρο το $(0,0,0)$

Παραμετρος γεννητορας v, θελω το μοναδιαιο καθετο N ανεξαρτητο απο το v για να ειναι αναπτυκτη

① 19/1/2018
③

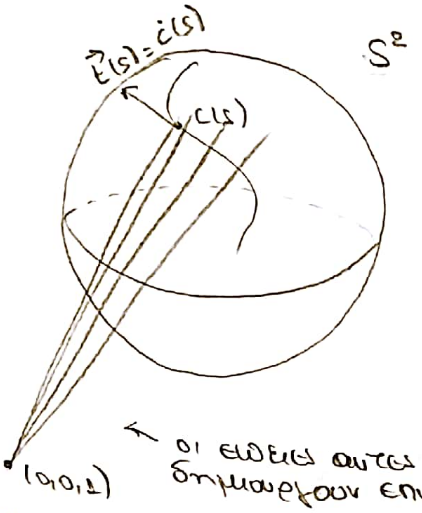
$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u,v) = \frac{(\cos u - v\sin u, \sin u + v\sin u, -v)}{\sqrt{1+2v^2}}$$

Δεν είναι ανεξάρτητη του v άρα δεν είναι αναπτυκτή

SOS
Έξοχο θεώρημα

Δύο επιφάνειες τοπικά ισομετρικές τότε καμπυλότητα Gauss = 0 και στις δύο επιφάνειες στο ίδιο σημείο.

Άσκηση 3



Κώνος με κορυφή (0,0,1)

Έστω $c: I \to S^2$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X(s,v) = (0,0,1) + v\,c(s)$$

i) Είναι η X κανονική;

ii) Να υπολογιστεί η μέση καμπυλότητα αν είναι κανονική

Λύση

i) $X_s(s,v) = v\,\dot{c}(s) = v\,\vec{t}(s)$, $X_v(s,v) = c(s)$

$X_s \times X_v = v\,\vec{t}(s) \times c(s)$ (αν v=0 θα πάρω κενό)

$\|X_s \times X_v\| = |v| \cdot \|\vec{t}(s) \times c(s)\|$

$\|\vec{t}(s) \times c(s)\| = \|\vec{t}(s)\| \cdot \|c(s)\| \cdot \sin\measuredangle(\vec{t}(s), c(s)) = \sin\measuredangle(\vec{t}(s), c(s)) = 1$

(π) $\langle c(s), c(s)\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{c}(s), c(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{t}(s), c(s)\rangle = 0 \Rightarrow$

$\measuredangle(\vec{t}(s), c(s)) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \|\vec{t}(s) \times c(s)\| = 1$

Άρα $\|X_s \times X_v\| = |v| > 0 \iff v \neq 0$

Η X είναι κανονική $\iff v \neq 0$

ii) Υπολογίζω ότι $v>0$ για να έχω ότι η X είναι κανονική και να βρω τη μέση καμπυλότητα

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

$E = \|X_s\|^2 = v^2$

$F = \langle X_s, X_v \rangle = 0$ (επειδή είναι διαφορική η καμπύλη είναι κάθετα μεταξύ τους)

$G = \|X_v\|^2 = 1 = \|c(s)\|^2$ (από υπόθεση)

$$N = \frac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|} = \vec{t}(s) \times c(s)$$ → Επειδή έχω μέτρο ένα.

$X_{ss} = v\vec{t}'(s) \Rightarrow X_{ss} = v\,\kappa(s)\,\vec{n}(s)$

$X_{sv} = \vec{t}(s)$

$X_{vv} = 0$

Θεμ. ποσά 2ης τάξης

$e = \langle X_{ss}, N \rangle = \langle v\,\kappa(s)\,\vec{n}(s), \vec{t}(s) \times c(s) \rangle = v\,\kappa(s) \langle \vec{n}(s), \vec{t}(s) \times c(s) \rangle =$

$\langle \vec{t}(s) \times \vec{n}(s), c(s) \rangle$

$= v\,\kappa(s)\,[\vec{t}(s), c(s), \vec{n}(s)] = v\,\kappa(s)\,[\underbrace{\vec{t}(s), \vec{n}(s)}_{\vec{b}(s)}, c(s)] = -v\,\kappa(s) \langle \vec{b}(s), c(s) \rangle$

$f = \langle X_{sv}, N \rangle = \langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \times c(s) \rangle = [\vec{t}(s), \vec{t}(s), c(s)] = 0$

$g = \langle \overset{0}{X_{vv}}, N \rangle = 0$

Άρα $$H = \frac{\cancel{Eg} - \cancel{2Ff} + Ge}{2\underbrace{(EG - F^2)}_{\|X_s \times X_v\|^2}} = \frac{Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{-v\,\kappa(s) \langle \vec{b}(s), c(s) \rangle}{2v^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$H = -\frac{1}{2v}\,\kappa(s) \langle \vec{b}(s), c(s) \rangle$$

Scanned by CamScanner

Ερωτημα

Ποτε η X ελαχιστικη επιφανεια; $(H=0)$

Απαντηση

Η X ειναι ελαχιστικη $\Leftrightarrow H=0 \Leftrightarrow \langle \vec{b}(s), c(s)\rangle = 0 \ \forall s$

Τι ειδους καμπυλη μπορει να ειναι αυτη?

$\langle \vec{b}(s), c(s)\rangle = 0 \ \forall s \in I \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}(s), c(s)\rangle + \langle \vec{b}(s), \dot{c}(s)\rangle = 0 \Rightarrow$

$\langle -\tau(s)\vec{n}(s), c(s)\rangle + \cancel{\langle \vec{b}(s), \vec{t}(s)\rangle}^{0} = 0 \Rightarrow -\tau(s)\langle \vec{n}(s), c(s)\rangle = 0 \ \forall s.$

Αν $\tau(s)=0$ τοτε επιπεδη καμπυλη (θεωρημα)

Επιπεδη καμπυλη σφαιρικη = κυκλος

Περιπτωσεις

1. Υπαρχει s_0 τ.ω $\tau(s_0) \neq 0$
2. $\forall s_0$ ισχυει $\tau(s)=0$

για την 1

Εστω οτι ισχυει η 1 αυτο σημαινει οτι $\exists \varepsilon > 0 \ \forall s \in (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon) = I_0$

και $\tau(s) \neq 0$, λογω συνεχειας της I

Τοτε $\forall s \in I_0$: $\langle \vec{n}(s), c(s)\rangle = 0$

Εχω ατοπη : $\langle \vec{b}(s), c(s)\rangle = 0$

$\langle \vec{t}(s), c(s)\rangle = 0$

$\Rightarrow c(s) = 0$ το μηδενικο διανυσμα.

ατοπο διοτι $\|c(s)\| = 1$ (απο υποθεση)

αρα ισχυει η 2

Η c ειναι επιπεδη και $\vec{b}(s) = \vec{b}$ = σταθ, $\langle \vec{b}(s), c(s)\rangle = 0$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $c(s) = (x(s), y(s), z(s)) = 0$

$b_1 x(s) + b_2 y(s) + b_3 z(s) = 0$

$b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$

Ειναι μεγιστος κυκλος.

$X(s,v) = (0,0,2) + v\,c(s)$

Γνωρίζω ότι είναι αναπτυκτή από θεώρημα

Υπάρχουν ομφαλικά σημεία;

Όχι δεν υπάρχουν ομφαλικά σημεία διότι $k=0$

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{e}{v^2} = \cancel{\frac{0}{0}} = \frac{0}{1} \neq 0$$

Υπάρχουν ισοπεδα σημεία;

$(k=H=0$ ή $II_p=0)$

Μπορεί σε κάποιο σημείο το e να είναι μηδέν άρα μπορεί και να υπάρχουν

Άσκηση 4

Το κύριο κάθετο καμπύλης $c: I \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και καμπυλότητα $k(s) > 0 \ \forall s \in I$

$\vec{n}(s) = \cos s\,\vec{a} + \sin s\,\vec{b}, \ \forall s \in I$ είναι της μορφής

και κάθετα μεταξύ τους, ποια καμπύλη είναι αυτή; όπου $\{\vec{a},\vec{b}\}$ είναι μοναδιαία

Λύση

$$\dot{\vec{n}}(s) = -\sin s\,\vec{a} + \cos s\,\vec{b} \Rightarrow \ddot{\vec{n}}(s) = -\cos s\,\vec{a} - \sin s\,\vec{b} \Rightarrow \ddot{\vec{n}}(s) = -\vec{n}(s) \quad (1)$$

$$\dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau\vec{b} \Rightarrow \ddot{\vec{n}} = -\dot{k}\vec{t} - k\dot{\vec{t}} + \dot{\tau}\vec{b} + \tau\dot{\vec{b}} \xrightarrow[\dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}]{\dot{\vec{t}} = k\vec{n}} -\dot{k}\vec{t} - k^2\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b} - \tau^2\vec{n}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{n}} = -\dot{k}\vec{t} - (k^2+\tau^2)\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω

$$-\dot{k}\vec{t} - (k^2+\tau^2)\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b} = -\vec{n} = 0\vec{t} - \vec{n} + 0\vec{b} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\dot{k} = 0 \\ -(k^2+\tau^2) = -1 \\ \dot{\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \text{σταθ} > 0 \\ k^2 + \tau^2 = 1 \\ \tau = \text{σταθ} \end{cases}$$

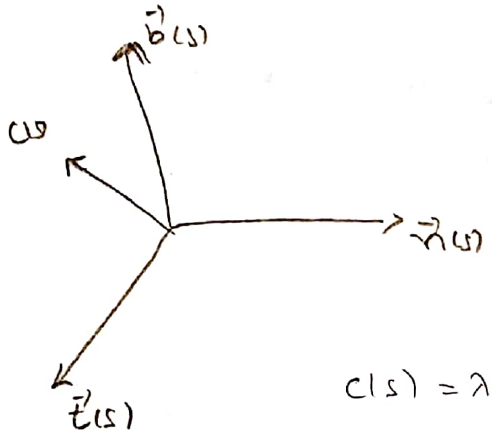
Αν $\tau = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ Η c είναι μοναδιαίος κύκλος

Αν $\tau \neq 0 \Rightarrow$ Είναι κυλινδρική έλικα

Άσκηση 5

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$ και καμπυλότητα $k(s)>0$ $\forall s \in I$. Αν ισχύει $\langle c(s), \vec{n}(s) \rangle = 0$ $\forall s \in I$. Δείξτε ότι $\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot\cdot} = 0$

Λύση



$\langle c(s), \vec{n}(s) \rangle = 0 \Rightarrow$

$$c(s) = \underbrace{\langle c(s), t(s) \rangle}_{\lambda(s)} t(s) + \underbrace{\langle c(s), \vec{b}(s) \rangle}_{\mu(s)} \vec{b}(s)$$

$$c(s) = \lambda(s)\, \vec{t}(s) + \mu(s) \cdot \vec{b}(s) \Rightarrow$$

$$\dot{c}(s) = \dot{\lambda} \vec{t} + \lambda \dot{\vec{t}} + \dot{\mu} \vec{b} + \mu \dot{\vec{b}} \Rightarrow \vec{t} = \dot{\lambda} \vec{t} + \lambda k \vec{n} + \dot{\mu} \vec{b} - \mu \tau \vec{n} \iff$$

$$\vec{t} + 0\vec{n} + 0\vec{b} = \dot{\lambda} \vec{t} + (\lambda k - \mu \tau) \vec{n} + \dot{\mu} \vec{b} \iff$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 1 \\ \lambda k - \mu \tau = 0 \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda k = \mu \tau \iff \frac{\tau}{k} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\mu =$ σταθ.

Αν $\mu = 0 \Rightarrow \lambda(s) k(s) = \mu \tau(s) = 0 \overset{k(s)>0}{\Longrightarrow} \lambda(s) = 0 \ \forall s \Rightarrow \dot{\lambda}(s) = 0$
άτοπο $\dot{\lambda}(s) = 1$

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\cdot} = \frac{1}{\mu} \dot{\lambda} = \frac{1}{\mu} = \text{σταθ} \quad \text{άρα} \quad \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot\cdot} = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\cdot} = 0$$

Άσκηση 6

Δίνεται η επιφάνεια $S : z = x(x^3 - 3y^2)$

1) Να βρεθούν τα ισόπεδα σημεία, αν υπάρχουν

2) Να περιγραφεί γεωμετρικά η τομή της S με το εφαπτόμενο επίπεδο της στο σημείο $P_0 = (0,0,0)$

Λύση

(1) Η S είναι κανονική επιφάνεια ως γράφημα της $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y) = x(x^3 - 3y^2)$ και συνήθ. σύστ. $X : \mathbb{R}^2 \to S$ με

$X(u,v) = (u, v, u(u^3 - 3v^2)) = (u, v, h(u,v))$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{h_{uu}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{}}, \quad g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{\ \cdots}}$$

$h_{uu} = 6u$, $h_{uv} = -6v$, $h_{vv} = -6u$

Τα ισόπεδα σημεία είναι τα σημεία όπου $e = g = f = 0 \iff$

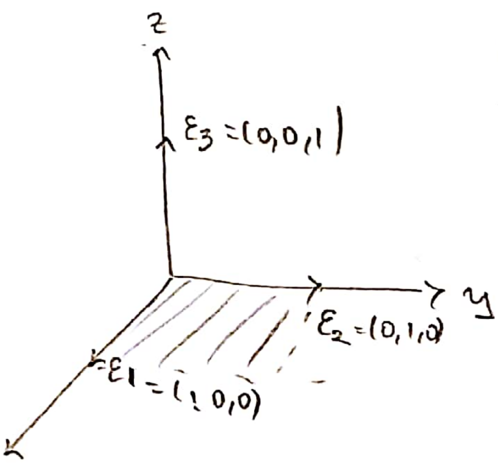
$h_{uu} = h_{uv} = h_{vv} = 0 \iff u = 0$ και $v = 0$

Άρα το μοναδικό ισόπεδο σημείο είναι το $P_0 = (0,0,0)$

(2) Για να βρω το εφαπτόμενο επίπεδο θέλω ένα σημείο και ένα διάνυσμα κάθετο

$X(u,v) = (u, v, u^4 - 3uv^2)$

$X_u(0,0) = (1,0,0) = \varepsilon_1$, $X_v(0,0) = (0,1,0) = \varepsilon_2$



Άρα το $T_{P_0}S$ είναι το επίπεδο με εξίσωση $z = 0$

Η Σπαγμένη τομή έχει εξίσωση $\begin{cases} z = x^4 - 3xy^2 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^3 - 3y^2) = 0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=0 \text{ ή } \\ x^3 - 3y^2 = 0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,\ z=0 \text{ άρα ο άξονας } y \\ y = \pm \left(\frac{x^3}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\ z=0 \text{ καμπύλη} \end{cases}$

Απο το σημείο $(0,0,0)$ υπαρχει ευθεια

$$(u,0,u^4) + (0,v,-3uv^2) = (u,0,u^4) + v(0,1,-3uv)$$

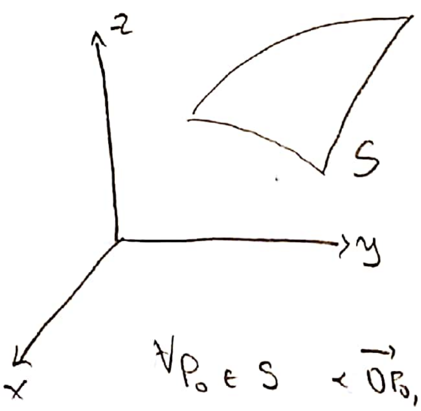
Δεν εξαρτάται μόνο από το v άρα δε μπορώ να πω ότι είναι ευθειογενής.

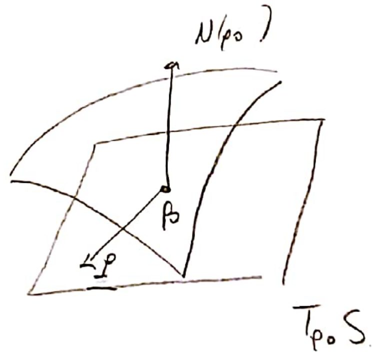
Άσκηση 7.

Έστω S κανονική επιφάνεια της οποίας όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα διέρχονται από την αρχή των αξόνων

1) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss
2) Αν η S δε περιέχει παραβολικά σημεία σημεία και για την επιφάνεια καμπύλη $c: I \to S$ ισχύει ότι είναι γραμμή καμπυλότητας, δείξτε ότι c επίπεδη

Λύση





$\forall P_0 \in S \quad \langle \vec{OP_0}, N(P_0) \rangle = 0 \qquad O$

$\langle P, N(P) \rangle = 0 \ \forall p \in S$

$\langle \vec{OP} - \vec{OP_0}, N(P_0) \rangle = 0 \qquad P \in T_{P_0}S$

$h : S \to \mathbb{R}$ με $h(p) = \langle p, N(p) \rangle$

Υπολογίζω το διαφορικό της στο τυχόν σημείο $p \in S$

$dh_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $w \in T_pS$, $dh_p(w) = (h \circ c)'(0) = ;$

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $c(0) = p$, $c'(0) = w$

$(h \circ c)(t) = h(c(t)) = \langle c(t), (N \circ c)(t) \rangle$

$(h \circ c)'(0) = \langle c'(0), (N \circ c)(0) \rangle + \langle c(0), (N \circ c)'(0) \rangle =$

$= \langle w, N(p) \rangle + \langle p, dN_p(w) \rangle \Rightarrow dh_p(w) = -\langle p, L_p(w) \rangle$ (1)

Επειδη $h(p) = 0$ $\forall p \in S$ εχω $dh_p = 0$ $\forall p \in S$ (2)

Αρα $\langle p, L_p(w) \rangle = 0$ $\forall w \in T_pS$

Εστω $\{e_1, e_2\}$ οι κυριες διευθυνσεις στο σημειο αυτο του T_pS

δηλαδη $L_p e_1 = k_1(p) e_1(p)$, $L_p e_2 = k_2(p) e_2(p)$

Αρα $\langle p, L_p e_1 \rangle = 0$ & $\langle p, L_p e_2 \rangle = 0$

$\Rightarrow k_1(p) \langle p, e_1 \rangle = 0 = k_2(p) \langle p, e_2 \rangle = 0$

Ισχυρισμος $k_1(p) k_2(p) = 0$

Αν $k_1(p) k_2(p) \neq 0 \Rightarrow \langle p, e_1 \rangle = \langle p, e_2 \rangle = 0$ για q σε περιοχη του V

$q = 0$ $\forall$ ατοπο δεν ειναι κανονικη επιφανεια.

{ Επιπεδο η μονη επιφανεια που τα σημεια της ειναι ισοπεδα }

Ασκηση . 8

Εστω παραμετρικη επιφανεια $X: U \to \mathbb{R}^3$ με παραμετρους $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ με μοναδιαιο καθετο N για το οποιο ισχυει

$N_u = \lambda X_u$, $N_v = 0$ (*)

1) Να αποδειξετε οτι $F=0$ και βρειτε K

2) $X_v =$ σταθ. διανυσμα $u = u_0 =$ σταθ ευθεια

Λυση

1) $LX_u = -N_u$, $LX_v = -N_v$

(*) $\Leftrightarrow$ $LX_u = -\lambda X_u$ και $LX_v = 0 = 0 X_v$

$\kappa_1(p)$ $e_1(p)$ $\kappa_2(p)$ $e_2(p)$

X_u X_v

$\Rightarrow$ $\boxed{\{\kappa_1, \kappa_2\} = \{-\lambda, 0\}}$ $\Rightarrow$ $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0$

αρα καμπυλοτητα Gauss $K=0$

$F=0$ ειναι λαθος

$\downarrow$

Αυτο ισχυει αν το $\lambda \neq 0$ γιατι $\kappa_1 \neq \kappa_2$

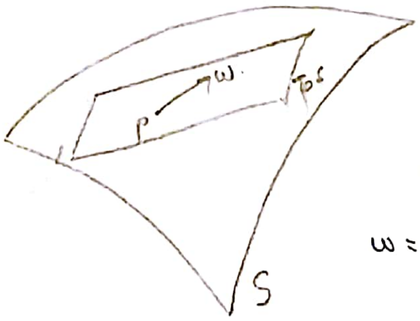
Αν $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow$ $\kappa_1 \neq \kappa_2$ $\Rightarrow$ $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ $\Rightarrow$ $F=0$

2) $X_v = \vec{a}$ $\Rightarrow$ $X(u,v) = u\vec{a} + w\vec{v}$ δε μπορει να συμβει κατι τετοιο χωρις καποιες προυποθεσεις.

Ασκηση 9

Αποδείξτε οτι αν η μεση καμπυλοτητα σε μη ισοπεδο σημειο p κανονικης επιφανειας S ειναι 0, τοτε υπαρχουν δυο καθετες μεταξυ τους ασυμπτωτικες διευθυνσεις σ'αυτο το σημειο

Λυση



$H(p)=0 \iff \frac{1}{2}(k_1(p)+k_2(p))=0 \iff$

$k_1(p)+k_2(p)=0 \iff \boxed{k_1(p)=-k_2(p)}$

$w \in T_pS\setminus\{0\}$ ειναι ασυμπτωτικη διευθ $\iff k_n(w)=0$

$w=\cos\phi e_1+\sin\phi e_2$, $k_n(w)=k_1(p)\cos^2\phi+k_2(p)\sin^2\phi$ (Euler)

$k_n(w)=0 \iff k_1(p)\cos^2\phi+k_2(p)\sin^2\phi=0 \iff k(p)\cos^2\phi-k(p)\sin^2\phi=0$

$\iff k(p)(\cos^2\phi-\sin^2\phi)=0 \xLeftrightarrow[\text{μη ισοπεδο}]{k(p)\neq 0} \cos 2\phi=0 \iff 2\phi=\frac{\pi}{2}$ ή $2\phi=\frac{3\pi}{2}$

$\iff \varphi=\frac{\pi}{4}$ ή $\varphi=\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$